

Экзаменационная программа
по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды»
для всех потоков,
кроме потока Карасёва Р.Н. (ЛФИ) и Лукашова А.Л. (ФИВТ),
весенний семестр 2021–2022 учебного года

1. Предел последовательности точек в n -мерном евклидовом пространстве. Связь между сходимостью последовательности точек и сходимостью последовательностей их координат. Внутренние, предельные, изолированные точки множества. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.
2. Предел числовой функции нескольких переменных. Предел функции по множеству. Пределы по направлениям. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость (точных) нижней и верхней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.
3. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Градиент и производная по направлению.
4. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.
5. Определение измеримости по Жордану множества в n -мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана.
(Для потока Бесова О.В.: Измеримость и мера графика непрерывной на компакте функции.)
6. (Для потока Бесова О.В.: Мера Лебега в n -мерном евклидовом пространстве. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Аддитивность меры Лебега. Счётная полуаддитивность внешней меры Лебега. Счётная аддитивность меры Лебега. Непрерывность меры Лебега (без доказательства)).
7. Определенный интеграл Римана. Верхние и нижние суммы Дарбу.
(Кроме потока Бесова О.В.: Свойства сумм Дарбу.)
Критерии интегрируемости.
(Для потока Тюленева А.И.: критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.)
Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле.

8. Геометрические приложения определённого интеграла — площадь криволинейной трапеции, объём тела вращения, длина кривой. Площадь поверхности вращения (без доказательства).
9. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства. Ориентация гладкой кривой. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
10. Несобственный интеграл. Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций, признак сравнения. Интегралы от знакопеременных функций, сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.
11. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признак сравнения, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды, сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Лейбница, Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Произведение абсолютно сходящихся рядов.
(Для потока Тюленева А.И.: Перестановки членов условно сходящегося ряда. Теорема Римана.)
12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.
13. Степенные ряды с комплексными членами. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши–Адамара. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда.
(Кроме потока Бесова О.В.: Первая теорема Абеля.)
(Для потока Петровича А.Ю.: Вторая теорема Абеля.)
14. Степенные ряды с действительными членами.
(Для потока Петровича А.Ю.: Непрерывность суммы степенного ряда на множестве точек сходимости.)
Почленное интегрирование степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность представления функции степенным рядом.
(Кроме потока Бесова О.В.: Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд.)
Ряд Тейлора.
(Кроме потока Петровича А.Ю.: Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.)
Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций: e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.
(Кроме потока Бесова О.В.: Разложение в степенной ряд функции e^z комплексного переменного z .)
(Для потока Бесова О.В.: Функция e^z комплексного переменного, формулы Эйлера.)